

# FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

## LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

### **Introducción**

Siempre que haya un proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo, sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo, ese proceso se describe mediante una exponencial. Por ejemplo:

- Crecimiento de bacterias y otras poblaciones animales o vegetales
- Interés del dinero acumulado
- Desintegración radiactiva

### **Descripción**

Se llaman funciones exponenciales a las funciones de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde la base de la potencia "a" es constante (un número) y el exponente la variable x.

### **Un ejemplo real**

Algunos tipos de bacterias se reproducen por "mitosis", dividiéndose la célula en dos cada espacios de tiempo muy pequeños, en algunos casos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una, en un día?

Minutos	15	30	45	60	....
NºBacterias	2	4	8	16	2 <sup>x</sup>

siendo x los intervalos de 15 minutos:..24 = 16 en una hora, 28 = 256 en dos horas,... 224·4 = 296 = 7,9·1028. ¡en un día!. Esto nos da idea del llamado ¡crecimiento exponencial!, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa.

Una propiedad importante que se da en cualquier función exponencial es que el resultado tras un aumento de la variable independiente no depende del valor inicial de la misma, es decir:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{a^{x+h}}{a^x} = \frac{a^x a^h}{a^x} = a^h = f(h)$$

esta propiedad, así formulada, no nos dice gran cosa; pero llevándola a un ejemplo práctico es de enorme importancia. Por ejemplo, si un bosque crece de forma exponencial y en los últimos 134 se ha duplicado su masa vegetal, volverá a duplicarse en los siguientes 134 años. Es decir, si el bosque ha aumentado en 10 años es 5,31 % podremos asegurar que cada diez años tendrá el 5,31 % más que al comenzar los mismos. Dicho de otra forma, cada 10 años su masa se multiplicará por 1,0531.

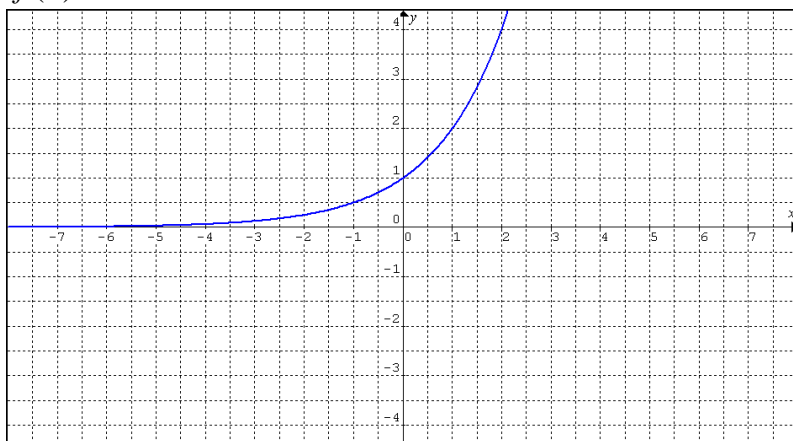
## Gráficas

En el siguiente enlace tenemos un programa con el que podemos dibujar las funciones exponenciales de base y exponente que queramos:

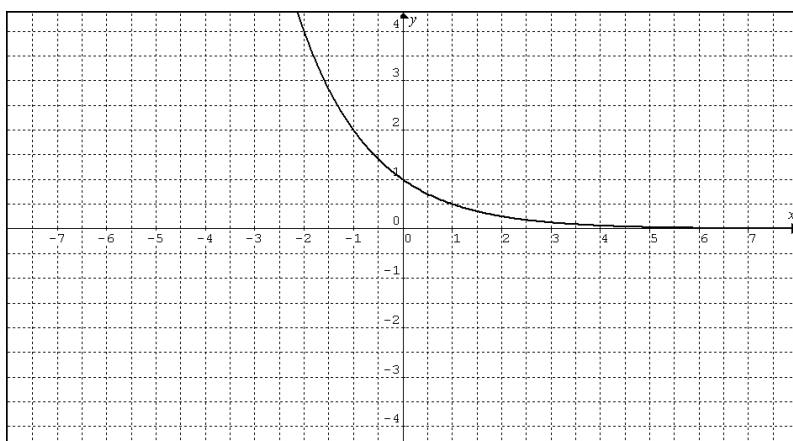
[http://descartes.cnice.mecd.es/Bach\\_HCS\\_1/Funcion\\_exponencial/Funcion\\_exponencial\\_1.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Funcion_exponencial/Funcion_exponencial_1.htm)

A continuación dibujamos dos sencillos ejemplos de funciones exponenciales. La base vale 2 en ambos casos, y el exponente que hemos tomado es  $x$  en el primer caso y  $-x$  en el segundo.

$$f(x) = 2^x$$



$$f(x) = 2^{-x}$$

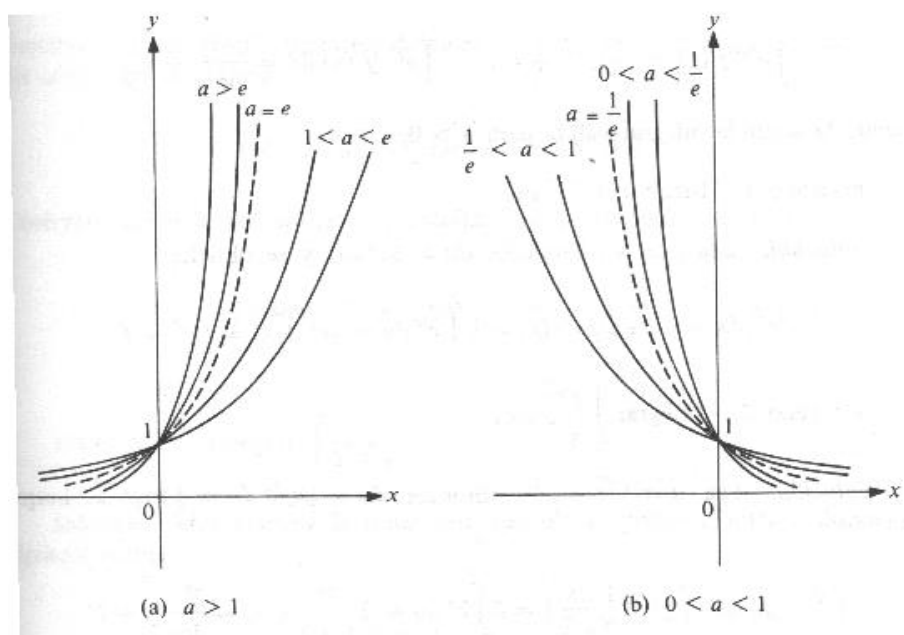


### Primeras consecuencias tras observar las gráficas:

1.- Observa que para que la función tenga sentido y se pueda dibujar debe ser  $a > 0$  ¿sabrías decir por qué?. Piensa por ejemplo si  $a = -2$ , ¿cómo se definiría  $(-2)^{1/2}$ ? . Lo mismo pasaría con otros valores de  $x$ , por lo que la función no tendría sentido. Observa que si  $a = 0$ , se trata de la función 0, sin interés.

2.- Observa que la función cuando  $a > 1$  es muy distinta que cuando  $a < 1$ , y además que cuando  $a = 1$  se trata de una recta.

En el siguiente dibujo observamos la evolución de la gráfica de la función exponencial según crezca o disminuya la base:



## Propiedades de las funciones exponenciales

- 1.- Observa que la función existe para cualquier valor de  $x$  (basta con que escribas cualquier valor de  $x$  en la ventana inferior de la escena y ver que siempre se obtiene el correspondiente de  $y$ , aunque para valores muy grandes de  $x$  el programa no presente el que toma " $y$ " realmente por ser muy grande y para valores negativos grandes de  $x$  tome como  $y=0$  por valer casi 0). **Decimos que la función existe siempre o que el DOMINIO de la función es todo  $\mathbb{R}$ .**
- 2.- Observa que en todos los casos la función pasa por un punto fijo: el  $(0,1)$  (basta que asignes el valor a  $x = 0$ ) o sea que **CORTA AL EJE DE ORDENADAS en el punto  $(0,1)$ .**
- 3.- Observa que los valores de  $y$  son siempre positivos (prueba cuantos valores desees para  $x$ ), luego **LA FUNCIÓN SIEMPRE TOMA VALORES POSITIVOS para cualquier valor de  $x$ .**
- 4.- Observa que es siempre creciente o siempre decreciente (para cualquier valor de  $x$ ), dependiendo de los valores de la base " $a$ ". Por tanto **la función es creciente si  $a > 1$  y si  $0 < a < 1$  es decreciente**
- 5.- Observa que se acerca al eje  $X$  tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que  $a < 1$  y hacia la izquierda en caso de  $a > 1$ . Eso implica que **EL EJE  $X$  ES UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL** (Hacia la izquierda si  $a > 1$  y hacia la derecha si  $a < 1$ )

## LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Dado que la función exponencial es biyectiva, el teorema de la función inversa nos asegura que existe una función  $g(x) = (a^x)^{-1}$ . Dicha función es la FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

[http://descartes.cnice.mecd.es/Bach\\_CNST\\_1/Funcion\\_logaritmica/Funcion\\_logaritmo\\_1.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Funcion_logaritmica/Funcion_logaritmo_1.htm)

### **Descripción**

Se llaman funciones logarítmicas a las funciones de la forma  $f(x) = \log_a(x)$  donde "a" es constante (un número) y se denomina la base del logaritmo.

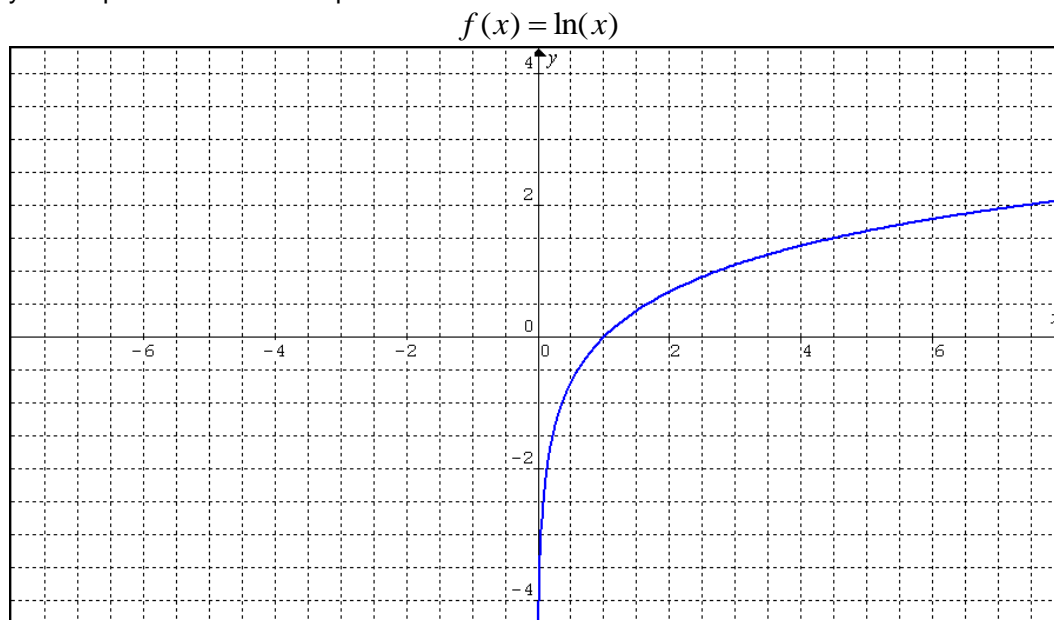
Además sabremos que la base (b) de los logaritmos debe ser un número positivo (al igual que la base de la potencia de una función exponencial) y además no debe ser 1 ya que  $\log_1(a)$  en general no existe ya que si a no es 1, 1n no puede ser a.

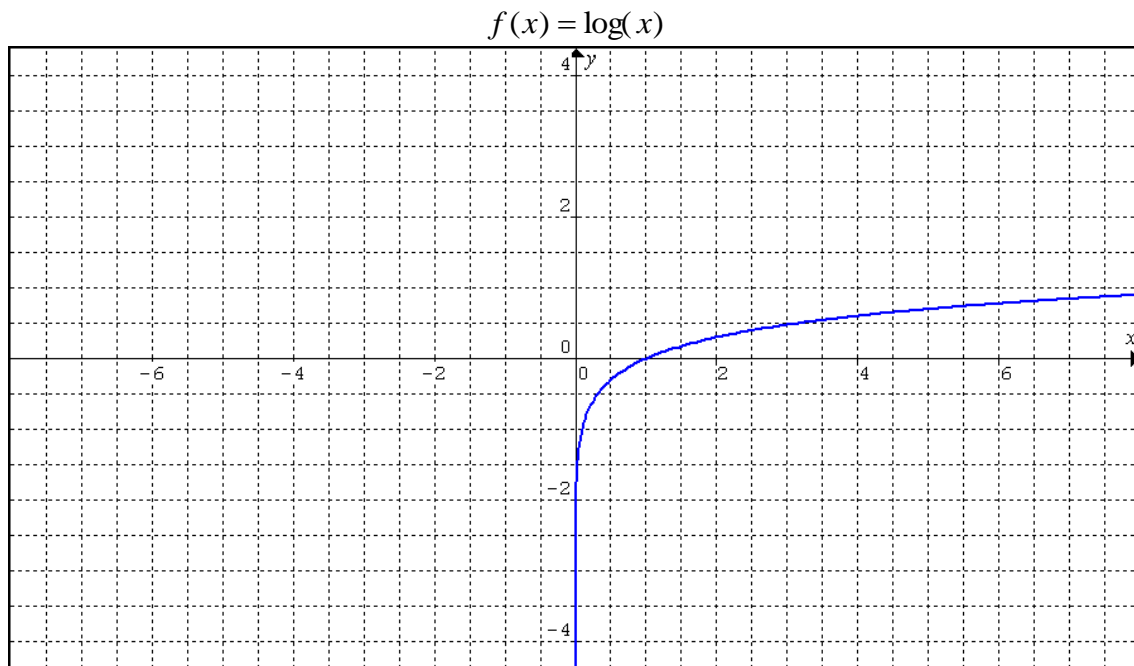
Sabemos también que las bases más frecuentes para los logaritmos son las base 10 (logaritmos decimales) y la base el número "e=2,718281.." (logaritmos neperianos).

La función logarítmica que más se utiliza en matemáticas es la función "logaritmo neperiano" y se simboliza normalmente como  $\ln(x)$ , (la función logaritmo en base 10 se simboliza normalmente como  $\log(x)$ ). Se trata de la inversa de la exponencial en la que a toma el valor de la constante de Euler:  $\ln(x) = (e^x)^{-1}$

### **Gráficas**

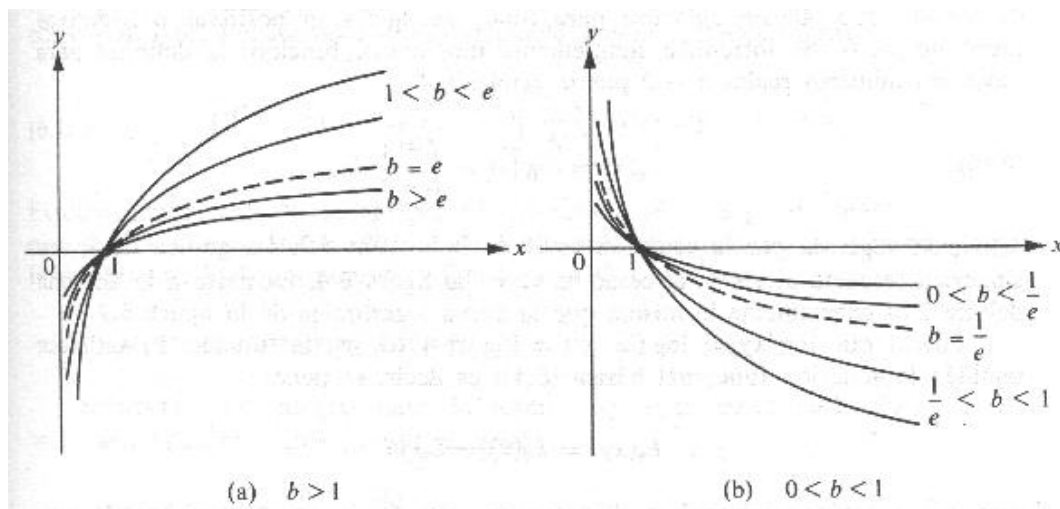
A continuación representamos las gráficas de unas cuantas funciones logarítmicas, para una mayor comprensión de su comportamiento





De estas observaciones deducimos las primeras consecuencias para las funciones logarítmicas: Para que la función tenga sentido y se pueda dibujar debe ser  $a > 0$  y  $a \neq 1$ .

Es de recibo también advertir la diferencia que vamos a encontrar cuando la base del logaritmo es mayor o menor a 1.



### **Propiedades:**

Supondremos, a partir de ahora, que  $a > 1$  y que  $a \neq 1$ . En esta escena observaremos las propiedades.

1.- Observa que la función existe sólo para valores de  $x$  mayores que 0, a diferencia de la exponencial que existe para cualquier valor de  $x$ . (puedes utilizar la definición de logaritmo para ver que el logaritmo de un número negativo o de 0 no existen). El DOMINIO de la función logarítmica es  $\mathbb{R}^+$  o el intervalo  $(0, \infty)$

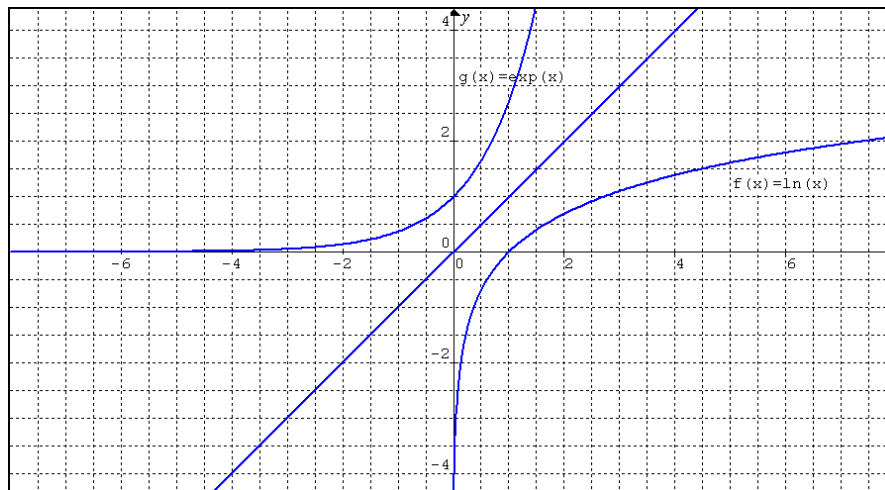
2.- Demuestra numéricamente que  $\log_0(a)$ ,  $\log_2(-3)$ ,  $\log_{1/2}(-4)$  y en general  $\log_a(b)$ , siendo  $b$  un número negativo, no existen, utilizando la definición de logaritmo. Obsérvalo en las escenas gráficas.

3.- Observa que en todos los casos la función pasa por un punto fijo: el  $(1,0)$  (para verlo basta con que asignes en la escena a  $x$  el valor 1 y observes el de  $y$ ). Por tanto la gráfica siempre: **CORTA AL EJE DE ABSCISAS en el punto  $(1,0)$ .**

4.-Observa que se acerca al eje  $Y$  tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia abajo en el caso en que  $a > 1$  y hacia arriba en caso de  $a < 1$  ("SIEMPRE POR LA DERECHA"), se dice por ello que: **EL EJE Y ES UNA ASÍNTOTA VERTICAL**

## ***Relación entre el logaritmo y la exponencial***

Las funciones exponencial y logarítmica se dice que son una inversa de la otra, aunque quizás aun no conocerás el concepto de función inversa. Gráficamente se observa viendo que son simétricas respecto a la recta  $y = x$ , como se ve en la escena.



## **EJERCICIOS**

1.- Pedimos dinero en un banco y nos comprometemos a devolverlo todo a los 5 años. Nos dicen que debemos devolver exactamente el doble de lo que los dieron, ¿qué interés nos están pidiendo?

2.- Explica por qué todas las funciones exponenciales pasan por el punto  $(0,1)$

## SOLUCIONES

1.

Suponemos que el dinero crece de forma exponencial. Tomando como unidad de tiempo 1 año y como capital inicial  $C$ , la expresión

$f(x) = C \cdot a^x$  nos dará el valor del capital cuando hayan transcurrido  $x$  años

sabemos que cuando  $x=5$  el capital se ha duplicado, es decir,  $C \cdot a^5 = 2 \cdot C$ , luego  $a^5 = 2$  por lo que  $a = \sqrt[5]{2} = 1,1487$ . Eso quiere decir que nos están cobrando un interés de 0,1487 por uno anual, o lo que es lo mismo, un 14,87 %

2.

Porque cualquier número elevado a 0 vale 1, así que la función siempre verificará ese punto