IES ATENEA
San Sebastián de los Reyes

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES I

Examen de la tercera evaluación

Nombre y apellidos____________________________________Fecha: 10 de junio de 2010

1.- (1, 5 puntos) En seis modelos de zapatillas deportivas se ha estudiado el peso, en gramos, que tiene (para el número 42) y su precio, en euros. La información obtenida se recoge en esta tabla:

Peso	620	645	655	640	630	610
Precio	60	35	95	75	30	75

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Cómo es la relación entre las dos variables?

2.- (1,5 puntos) Se ha estudiado en distintas marcas de yogures naturales el porcentaje de grasa que contenían, así como las kilocalorías por envase. Estos son los resultados obtenidos en seis de ellos:

X: Grasa (%)	2,2	2	1,9	3,1	3	2
Y: Kcal/envase	64	55	58	79	65	52

a) Halla la recta de regresión de Y sobre X
b) Calcula $\hat{y}(2,5)$ e $\hat{y}(10)$. ¿Son válidas estas estimaciones? (Sabemos que $r = 0,85$).

3.- (2 puntos) En un sorteo que se realiza diariamente de lunes a viernes, la probabilidad de ganar es 0,1. Vamos a jugar los cinco días de la semana y estamos interesados en saber cuál es la probabilidad de ganar 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 días.

a) **Haz una tabla con las probabilidades.**
b) **Calcula la media y la desviación típica.**

4.- (2 puntos) El número de plazas para cursar 1º de Medicina en cierta universidad representa el 5% del alumnado de 2º de Bachillerato. Este año, las notas medias de los alumnos que acababan Bachillerato siguen una distribución normal de media 6,3 y desviación típica 0,8. Calcula la nota media mínima que debe tener un alumno para cursar la carrera de Medicina.

5.- (2 puntos) La función de densidad de una variable continua, x, viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2-x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Represéntala gráficamente.**
b) Calcula $P[x \le 1]$ y $P\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right]$.

6.- (1 punto) De una distribución bidimensional (x, y) conocemos:

La recta de regresión de Y sobre X : y = 11,98 – 1,99x
La recta de regresión de X sobre Y : y = 12 – 2x

Calcula el centro de gravedad de la distribución y el coeficiente de correlación.

Ejercicio nº 1.-

En seis modelos de zapatillas deportivas se ha estudiado el peso, en gramos, que tiene (para el número 42) y su precio, en euros. La información obtenida se recoge en esta tabla:

Peso	**620**	**645**	**655**	**640**	**630**	**610**
Precio	**60**	**35**	**95**	**75**	**30**	**75**

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Cómo es la relación entre las dos variables?

Solución:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
620	60	384400	3600	37200
645	35	416025	1225	22575
655	95	429025	9025	62225
640	75	409600	5625	48000
630	30	396900	900	18900
610	75	372100	5625	45750
3800	370	2408050	26000	234650

- Medias:

$$\bar{x} = \frac{3800}{6} = 633{,}33$$
$$\bar{y} = \frac{370}{6} = 61{,}67$$

- Desviaciones típicas:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2408.050}{6} - 633{,}33^2} = \sqrt{234{,}78} = 15{,}32$$
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{26000}{6} - 61{,}67^2} = \sqrt{530{,}14} = 23{,}02$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{234650}{6} - 633{,}33 \cdot 61{,}67 = 50{,}87 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xy} = 50{,}87$$

- Coeficiente de correlación:

$$r = \frac{50{,}87}{15{,}32 \cdot 23{,}02} = 0{,}14 \quad \rightarrow \quad r = 0{,}14$$

- La relación entre las variables es muy débil. Podemos decir que no están relacionadas.

2.- Se ha estudiado en distintas marcas de yogures naturales el porcentaje de grasa que contenían, así como las kilocalorías por envase. Estos son los resultados obtenidos en seis de ellos:

X: **Grasa (%)**	**2,2**	**2**	**1,9**	**3,1**	**3**	**2**
Y: **Kcal/envase**	**64**	**55**	**58**	**79**	**65**	**52**

a) Halla la recta de regresión de Y sobre X.
b) Calcula $\hat{y}(2,5)$ e $\hat{y}(10)$. ¿Son válidas estas estimaciones? (Sabemos que $r = 0,85$).

Solución:

a)

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2,2	64	4,84	140,8
2	55	4	110
1,9	58	3,61	110,2
3,1	79	9,61	244,9
3	65	9	195
2	52	4	104
14,2	373	35,06	904,9

- Medias:

$$\bar{x} = \frac{14,2}{6} = 2,37$$
$$\bar{y} = \frac{373}{6} = 62,17$$

- Varianza de x:

$$\sigma_x^2 = \frac{35,06}{6} - 2,37^2 = 0,23$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{904,9}{6} - 2,37 \cdot 62,17 = 3,47$$

- Coeficiente de regresión:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{3,47}{0,23} = 15,1$$

- Ecuación de la recta de regresión de y sobre x:

$$y = 62,17 + 15,1(x - 2,37) \quad \rightarrow \quad y = 15,1x + 26,38$$

b) $\hat{y}(2,5) = 15,1 \cdot 2,5 + 26,38 = 64,13$ kcal

$\hat{y}(10) = 15,1 \cdot 10 + 26,38 = 177,38$ kcal

Como la correlación es alta, $r = 0,85$, es razonable hacer estimaciones dentro del intervalo de datos. Para un porcentaje del 2,5 de grasa, las kilocalorías serán, aproximadamente, 64,13. Sin embargo, la segunda estimación no es válida porque $x = 10$ está muy alejado del intervalo de datos que hemos considerado.

3.- En un sorteo que se realiza diariamente de lunes a viernes, la probabilidad de ganar es 0,1. Vamos a jugar los cinco días de la semana y estamos interesados en saber cuál es la probabilidad de ganar 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 días.

a) Haz una tabla con las probabilidades.
b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

b) $\mu = \sum p_i x_i = 0{,}5 \quad \to \quad \mu = 0{,}5$

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0{,}7 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}67 \quad \to \quad \sigma = 0{,}67$$

4.- El número de plazas para cursar 1º de Medicina en cierta universidad representa el 5% del alumnado de 2º de Bachillerato. Este año, las notas medias de los alumnos que acababan Bachillerato siguen una distribución normal de media 6,3 y desviación típica 0,8. Calcula la nota media mínima que debe tener un alumno para cursar la carrera de Medicina.

Solución:

Llamamos X a las notas medias finales $\to$ X es $N(6{,}3;\ 0{,}8)$

Buscamos el valor de X para el cuál la $P[X > x] = 0{,}05$

Para una $N(0{,}1)$ $\to$ $P[z > k] = 1 - P[z \le k] = 0{,}05$ $\to$ $P[z \le k] = 0{,}95$ $\to$ $k = 1{,}645$

Por tanto:

$$\frac{x - 6{,}3}{0{,}8} = 1{,}645 \quad \to \quad x = 7{,}616 \approx 7{,}62$$

Debe obtener una media de 7,62 puntos o superior.

5.- La función de densidad de una variable continua, x, viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2 - x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

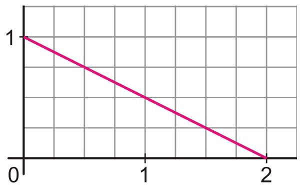
a) Represéntala gráficamente.

b) Calcula $P[x \le 1]$ y $P\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right]$.

Solución:

a) $y = \frac{2-x}{2}$, si $0 \le x \le 2$ corresponde al segmento que une los puntos $(0,1)$ y $(2,0)$.

La gráfica de $f(x)$ es:



b) El área total bajo la curva es 1.

- $P[x \le 1]$ es el área de un trapecio cuyas bases miden 1 y $\frac{1}{2}$, y su altura es 1. Por tanto:

$$P[x \le 1] = P[0 \le x \le 1] = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \;\rightarrow\; P[x \le 1] = \frac{3}{4}$$

- Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ tenemos un trapecio de bases $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$, y de altura 1. Por tanto:

$$P\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right] = \frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; P\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

6.- De una distribución bidimensional (x, y) conocemos:
La recta de regresión de Y sobre X : $y = 11{,}98 - 1{,}99x$
La recta de regresión de X sobre Y : $y = 12 - 2x$
Calcula el centro de gravedad de la distribución y el coeficiente de correlación.

Solución:

El punto de corte de ambas rectas será el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 11{,}98 - 1{,}99x \\ y = 12 - 12x \end{array}\right\} \rightarrow 11{,}98 - 1{,}99x = 12 - 2x \;\rightarrow\; 0{,}01x = 0{,}02 \;\rightarrow\; x = 2$$

$y = 12 - 2x = 12 - 4 = 8 \;\rightarrow\; y = 8$

El centro de gravedad es $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 8)$.

Coeficiente de correlación:

$$r = m_{yx} \cdot m_{xy} = -1{,}99 \cdot \frac{1}{-2} = 0{,}995$$