IES ATENEA
San Sebastián de los Reyes

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES I

Examen de la segunda evaluación

Nombre y apellidos____Fecha: 18-III-2010

1.- (1,5 puntos) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{4}$$

2.- (1 punto) Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=2x^3+x$ en el punto de abscisa
$x=-1$.

3.- (1,5 puntos) Dada la siguiente función:

$$f(x)=14x-7x^2$$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x=0$? ¿Y en $x=4$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

4.- (2 puntos) Obtén las asíntotas de la siguiente función y representa gráficamente la posición de la curva respecto a ellas:

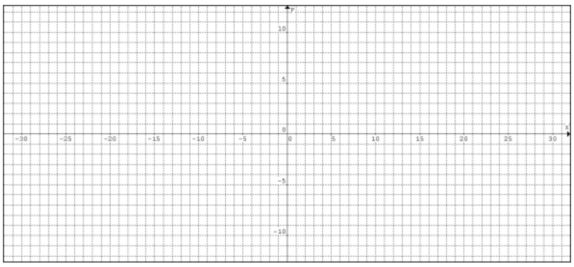
$$f(x)=\frac{x^2+2}{x+1}$$

5.- (1,5 puntos) Averigua los puntos de tangente horizontal de la función $f(x)=\frac{9x}{x^2+9}$

6.- (2,5 puntos) Escoje una de las dos funciones:

$$f(x)=x^3+3x^2-9x \qquad\qquad f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$$

Representa la gráfica de la función ayudándote de la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.



1.- Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-3x}{4}}$$

Solución:

- $f'(x)=\frac{2x-3}{4}$. Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$
$$f'(x)>0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x-3}{4}>0 \quad \rightarrow \quad 2x-3>0 \quad \rightarrow \quad x>\frac{3}{2}$$
$$f'(x)<0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x-3}{4}<0 \quad \rightarrow \quad 2x-3<0 \quad \rightarrow \quad x<\frac{3}{2}$$

2. **Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=2x^3+x$ en el punto de abscisa $x=-1$.**

Solución:

- $f'(x)=6x^2+1$
- La pendiente de la recta es $f'(-1)=7$.
- Cuando $x=-1, f(x)=-3$.

 La recta será:

$$y=-3+7(x+1)=-3+7x+7=7x+4$$

3.- **Dada la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x)=14x-7x^2}$$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x=0$? ¿Y en $x=4$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

a) $f'(x)=14-14x$

$f'(0)=14>0 \quad \rightarrow$ Creciente en $x=0$.

$f'(4)=-42<0 \quad \rightarrow$ Decreciente en $x=4$.

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 14-14x=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 14 - 14x > 0 \quad \rightarrow \quad 14 > 14x \quad \rightarrow \quad x < 1$$
$$f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad 14 - 14x < 0 \quad \rightarrow \quad 14 < 14x \quad \rightarrow \quad x > 1$$

La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $x = 1$.

4.- Obtén las asíntotas de la siguiente función y representa gráficamente la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$$

Solución:

- Asíntota vertical: $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2}{x + 1} = -\infty; \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2}{x + 1} = +\infty$$

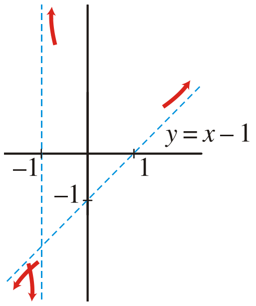
- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2 + 2}{x + 1} = x - 1 + \frac{3}{x + 1} \quad \rightarrow \quad y = x - 1 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{x+1} > 0 \quad \rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x \rightarrow -\infty$, $\frac{3}{x+1} < 0 \quad \rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Representación:



<u>Ejercicio nº 4.-</u>

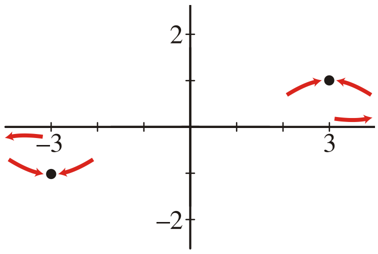
Averigua los puntos de tangente horizontal de la función $f(x) = \frac{9x}{x^2 + 9}$ y represéntalos gráficamente.

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{9(x^2+9) - 9x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{9x^2+81-18x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-9x^2+81}{(x^2+9)^2} = 0 \quad \to$

$$\to \quad -9x^2+81=0 \quad \to \quad x^2=9 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = -3 \quad \to \quad \text{Punto}\left(-3, \dfrac{-3}{2}\right) \\ x_2 = \ 3 \quad \to \quad \text{Punto}\left(3, \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x}{x^2+9} = 0; \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x}{x^2+9} = 0$



Mínimo en $\left(-3, \dfrac{-3}{2}\right)$ y máximo en $\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$.

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

a) Representa gráficamente la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x}$$

b) Ayudándote de la gráfica, estudia el dominio de $f(x)$, su continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+3x^2-9x\right) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+3x^2-9x\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to x^3+3x^2-9x = x\left(x^2+3x-9\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \to \quad \text{Punto}(0, 0) \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+36}}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x = 1{,}86 \quad \to \quad \text{Punto}(1{,}86; 0) \\ x = -4{,}9 \quad \to \quad (-4{,}9; 0) \end{cases} \end{cases}$$

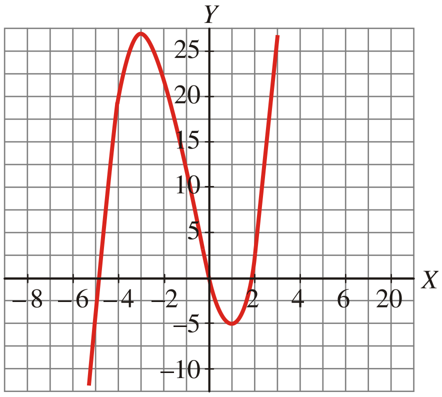
Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad \text{Punto}(0, 0)$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2+6x-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+108}}{6} = \dfrac{-6 \pm 12}{6}$

$$\begin{cases} x=-3 & \rightarrow \quad \text{Punto}(-3,\ 27) \\ x=1 & \rightarrow \quad \text{Punto}(1,-5) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

b) - Dominio $= \mathbb{R}$

- Es una función continua.
- Creciente en $(-\infty,\ -3) \cup (1,\ +\infty)$ y decreciente en $(-3,\ 1)$.

<u>Ejercicio nº 6.- bis</u>

a) Representa la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}}$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) - Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x^3 - 4 = 0$ $\rightarrow$ $x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ $\rightarrow$ Punto$(1{,}6;\ 0)$

Con el eje Y: no corta el eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

- Asíntotas verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3 - 4}{x^2} = x - \frac{4}{x^2} \quad \rightarrow \quad y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si $x \to -\infty$, $\frac{-4}{x^2} < 0 \quad \to \quad$ La curva está por debajo de la asíntota.

Si $x \to +\infty$, $\frac{-4}{x^2} < 0 \quad \to \quad$ La curva está por debajo de la asíntota.

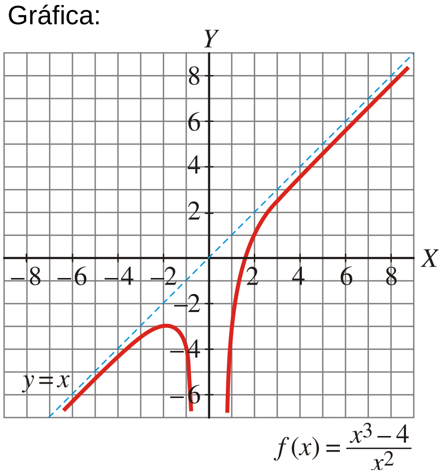
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 - 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 8x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^4 + 8x}{x^4} = \frac{x(x^3 + 8)}{x^4} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^3 + 8 = 0 \quad \to \quad x = -2 \quad \to \quad$ Punto $(-2, -3)$

- Gráfica:



b) - Continuidad:

Si $x \neq 0$, es continua.

Es discontinua en $x = 0$, pues tiene una rama infinita (asíntota vertical).

- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

La función es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $x = \frac{3}{2}$.