Ejercicio nº 1.-

Consideramos la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 5x^2 - 3x}$$

a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

a) $f'(x) = 10x - 3$

$f'(-1) = -13 < 0 \quad \to \quad$ Decreciente en $x = -1$.

$f'(1) = 7 > 0 \quad \to \quad$ Creciente en $x = 1$.

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 10x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{3}{10}$$

$$f'(x) > 0 \quad \to \quad 10x - 3 > 0 \quad \to \quad x > \frac{3}{10}$$

$$f'(x) < 0 \quad \to \quad 10x - 3 < 0 \quad \to \quad x < \frac{3}{10}$$

La función decrece en $\left(-\infty, \frac{3}{10}\right)$ y crece en $\left(\frac{3}{10}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $x = \frac{3}{10}$.

Ejercicio nº 2.-

Halla las ramas infinitas de la siguiente función y representa gráficamente los resultados que obtengas (en caso de que haya asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas):

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2}}$$

Solución:

- Asíntota horizontal: $y = 1$

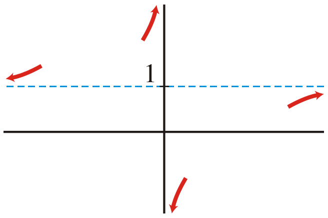
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = 1; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = 1$$

- Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x-3}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$$

- Representación:



Ejercicio nº 3.-

Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 (x+5)}$$

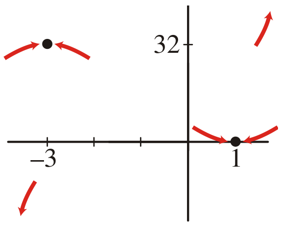
Solución:

- $f'(x) = 2(x-1)(x+5) + (x-1)^2 = (x-1)\left[2(x+5) + (x-1)\right] =$

$$= (x-1)(2x+10+x-1) = (x-1)(3x+9) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (1, 0) \\ x = -3 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (-3, 32) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^2 (x+5) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 (x+5) = +\infty$



Máximo en $(-3, 32)$ y mínimo en $(1, 0)$.

Ejercicio nº 4.-

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1}$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar los siguientes aspectos de *f(x)*: dominio, continuidad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^4 - 4x^2 + 1\right) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^4 - 4x^2 + 1\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \rightarrow 2z^2 - 4z + 1 = 0$ (siendo $z = x^2$)

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} z = 1{,}7 \\ z = 0{,}3 \end{cases}$$

$$z = 1{,}7 \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1{,}3 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(-1{,}3;\ 0) \\ x_2 = 1{,}3 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(1{,}3;\ 0) \end{cases}$$

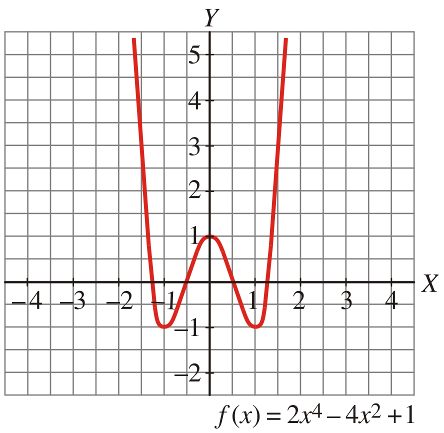
$$z = 0{,}3 \quad \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0{,}54 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0{,}54;0) \\ x_4 = -0{,}54 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(-0{,}54;0) \end{cases}$$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto (0, 1)

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(0,\ 1) \\ x = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(-1,\ -1) \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}(1,\ -1) \end{cases}$$

- Gráfica:



b) - Dominio $= \mathbb{R}$

- Es una función continua.

- Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

a) Representa gráficamente la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}}$$

b) A partir de la gráfica, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* (*x*).

Solución:

a) • Dominio:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 4x + 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(-1,\ 0)$$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{Punto}\left(0, \frac{-2}{3}\right)$

• Asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 1$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x+3)(x-1)} = +\infty; \qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

• Asíntota horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

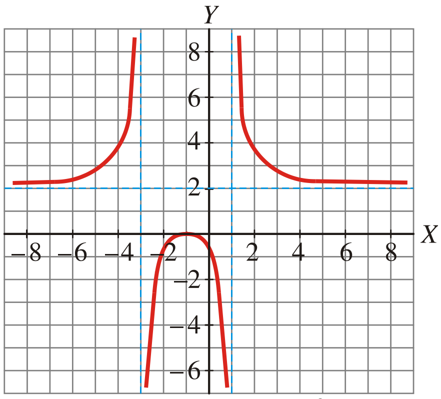
• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(4x+4)(x^2+2x-3) - (2x^2+4x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(2x^2+4x-6-2x^2-4x-2)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-8(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-16(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(-1, 0)$$

• Gráfica:



$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) □ Continuidad:

Si $x \neq -3$ y $x \neq 1$, es continua.

Es discontinua en $x = -3$ y en $x = 1$, pues tiene dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

- Creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$ y decreciente en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.