COMBINATORIA.

INTRODUCCIÓN

¿CUÁNTOS...?

Sin duda alguna es la palabra que más se repite en un contexto como el de la Combinatoria. Son muchas las situaciones en las que se nos plantea esta pregunta:

- ¿De cuántas formas se pueden colocar en una foto los jugadores de un equipo de fútbol.?

- ¿Cuántas diagonales tendrá un polígono de n lados?

- No recuerdo bien el número de mi tarjeta de crédito. Solo estoy seguro de que había un 7 y el 4 se repetía tres veces. ¿Cuántas pruebas tendré que realizar como máximo para localizar el dichoso número?

- ....

La *teoría combinatoria* nos proporcionará las fórmulas que nos permitan encontrar respuestas a muchas situaciones como las anteriores.

En combinatoria las cuestiones planteadas se analizan esencialmente atendiendo a:

a) Elementos de que disponemos para formar los grupos

b) Elementos que debe contener cada grupo

c) Posibilidad de repetir elementos (o no) en los grupos

d) La importancia o indiferencia en cuanto al orden en que aparecen los elementos en las agrupaciones

La teoría combinatoria se encuentra además relacionada con el problema de localizar los coeficientes del desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio. Binomio de Newton.

Con un manejo aceptable de las técnicas de recuento que analizaremos en esta unidad; podemos abordar de una forma más interesante el concepto de probabilidad en el sentido clásico de Laplace.

OBJETIVOS

- Distinguir entre las distintas situaciones que dan lugar a Variaciones (con y sin) y Permutaciones (con y sin)
- Distinguir entre las distintas situaciones que dan lugar a Combinaciones.
- Manejar con soltura las distintas fórmulas.
- Utilizar los números combinatorios para desarrollar cualquier potencia de un binomio.
- Resolver problemas de alguna dificultad con ayuda de las técnicas de recuento.

PRELIMINAR: PRINCIPIO GENERAL DE RECUENTO

Si un experimento puede realizarse de **n** formas diferentes y un segundo experimento puede hacerlo de **m** formas diferentes; entonces los dos experimentos juntos se pueden realizar de **n.m**formas diferentes. En LENGUAJE DE TEORÍA DE CONJUNTOS:

$$\left.\begin{array}{l} Card(A) = n \\ Card(B) = m \end{array}\right\} \Rightarrow Card(A \times B) = n \cdot m$$

- *card significa cardinal. Número de elementos del conjunto*

- ***(A x B) significa producto cartesiano***

EJEMPLOS:

- Ana tiene en su armario 6 camisetas, 9 pantalones de deporte y 8 pares de zapatillas. Le gustaría no repetir indumentaria ningún día durante el curso.

Sol: **6 x 9 x 8 = 432 indumentarias diferentes. Teniendo en cuenta que cada año escolar son aproximadamente 80 horas de Educación Física, Ana podría estar más de 5 años vistiéndose de forma diferente en cada clase.**

- Un conocido restaurante afirma que el cliente puede comer durante dos años sin repetir el menú. En la carta aparecen 5 primeros platos, 14 segundos y 7 postres. Analiza si se trata de una propaganda cierta o no.

Sol: **5 x 14 x 7 = 490 menús diferentes. Un cliente " fiel " no podría estar durante dos años comiendo menús distintos, por tanto el anuncio sería FALSO.**

Variaciones sin repetición.

Denominamos ***variaciones ordinarias*** o sin repetición de **n** elementos tomados de **m** en **m** (siendo **m<=n**) a cada uno de los distintos grupos de m elementos escogidos de entre los n, de manera que:

- En cada grupo, los m elementos sean distintos.

- Dos grupos son distintos, si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones ordinarias lo representamos $V_{n,m}$ y se calcula:

$$V_{n,m}=n.(n-1).(n-2)...(n-m+1)$$

EJEMPLOS RESUELTOS. (Para aclararnos):

- En una carrera de 100 metros participan 8 corredores. ¿De cuántas formas diferentes se podrían repartir las medallas de oro, plata y bronce?	***Sol: $V_{8,3}$ = 8 x 7 x 6 = 336 formas diferentes de podium***
- Un entrenador de fútbol dispone en la plantilla de su equipo de 7 delanteros de la misma calidad y que pueden actuar indistintamente en los tres puestos de ataque del equipo. ¿ Cuántas delanteras distintas podría confeccionar?	***Sol: $V_{7,3}$ = 7 x 6 x 5 = 210 tripletas de ataque***
- ¿ De cuántas maneras diferentes se pueden repartir tres premios distintos entre Juan, Pedro, María Alicia y Pilar.?	***Sol: $V_{5,3}$ = 5 x 4 x 3 = 60 formas distintas de reparto***

Variaciones con repetición.

Denominamos ***variaciones con repetición*** de **n** elementos tomados de **m** en **m** (obsérvese que no hay restricción alguna en cuanto a los valores de n y m) a los distintos grupos de m elementos, repetidos o no, que se pueden formar. Considerando:

- En cada grupo hay m elementos repetidos o no.

- Dos agrupaciones son diferentes si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

Al número de variaciones con repetición lo notaremos, $VR_{n,m}$ y se calculará:

$$VR_{n,m} = n^m$$

EJEMPLOS RESUELTOS (Para aclararnos):

- En una quiniela de fútbol, sin tener en la calidad de los equipos. ¿ Cuántas posibilidades distintas pueden darse?	***Sol:*** $VR_{3,14} = 3^{14}$ ***= 4782969 quinielas diferentes***
- Cuántos resultados diferentes se producen al lanzar 5 dados de distinto color y anotar los resultados de la cara superior?	***Sol:*** $VR_{6,5} = 6^5$ ***= 7776 resultados diferentes***
- Con un punto y una raya (símbolos clásicos del alfabeto Morse) ¿ Cuántas señales distintas de 5 dígitos pueden hacerse?	***Sol:*** $VR_{2,5} = 2^5$ ***= 32 señales distintas***

Permutaciones sin repetición.

Denominamos permutaciones ordinarias o sin repetición de **n** elementos, a cada uno de los distintos grupos que pueden formarse de manera que:

- En cada grupo entran todos los n elementos.

- Un grupo se diferencia de otro únicamente en el orden de colocación de los elementos.

Al número de permutaciones ordinarias de n elementos lo representaremos por P_n y se calculará:

$$P_n=n.(n-1).(n-2)...3.2.1$$

a este número lo llamaremos factorial de n y lo representaremos por **n!** , esto es:

$$n!=n.(n-1).(n-2)...3.2.1$$

- Si n = 1, se define 1!=1
- Si n = 0 se define 0!=1

Si te fijas bien, se pueden relacionar las permutaciones ordinarias con las variaciones ordinarias de n elementos tomados de n en n.

Vn,n = Pn

Permutaciones con repetición.

Denominamos permutaciones con repetición de **n** elementos en los que uno de ellos se repite "**a**" veces, otro "**b**" veces y así hasta el último que se repite **k** veces (**a+b+c+....k = n**); a todas las ordenaciones posibles de estos n elementos. Consideramos dos ordenaciones distintas si difieren en el orden de colocación de algún elemento (distinguible).

Notaremos a este tipo de permutación como:

$$P_n^{a,b,c,\ldots k}$$

y se calcularán:

$$P_n^{a,b,c,\ldots k} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\ldots k!}$$

EJEMPLOS RESUELTOS (Para aclararnos):

- ¿ De cuántas formas pueden ordenarse en una estantería 5 libros de lomo blanco, 3 de lomo azul y 6 de lomo rojo?	*Sol: 168168 formas ordenaciones distintas*
- ¿ Cuántas palabras de 6 letras con o sin sentido se pueden formas con las letras de AMASAS ?	*Sol: 60 palabras*
- En una carrera por equipos participan 4 españoles, 5 franceses y 3 marroquíes. Si lo único reseñable de cada corredor es su nacionalidad, ¿ de cuántas formas posibles podrían terminar la carrera?	*Sol: 27720 formas de acabar la carrera*

Combinaciones.

Denominamos combinaciones ordinarias o sin repetición de **n** elementos tomados de **m** en **m**, **(m<=n)** a las distintas agrupaciones de **m** elementos de manera que:

- En cada grupo entren m elementos distintos

- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento.

El número de combinaciones ordinarias de m elementos tomados de m en m lo notaremos $C_{n,m}$ y se calcula:

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!.(n-m)!}$$

Se puede observar fácilmente que:

$$V_{n,m} = C_{n,m} . P_m \quad \Rightarrow \quad C_{n,m} = \frac{V_{n,m}}{P_m}$$

Propiedades algebraicas de los números combinatorios:

1. $\binom{m}{0} = 1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

2. $\binom{m}{m} = 1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

3. $\binom{m}{1} = m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

4. $\binom{m}{m-1} = m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$

5. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$